Formulario

1.1. Repaso matemático

$$z^* = x + jy = \sqrt{x^2+y^2}e^{j\theta} = me^{j\theta} = m(\cos(\theta) + j\sin(\theta)); \qquad \theta = \arctan\frac{x}{y}$$

$$\int_a^b e^f \cdot f' = e^{f(b)} - e^{f(a)} \qquad sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad \sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n = \begin{cases} N & \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \delta(x)f(x)dx = f(x_0) \Longleftrightarrow \delta(x_0) = 1 \text{ (si } x_0 \in [a,b]) \quad \text{Si } N \to +\infty \text{ y } |\alpha| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$$

1.2. Relación entre senoidales y exponenciales complejas

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \qquad \sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

$$Par\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \qquad Impar\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

$$\mathcal{R}e\{x(t)\} = \frac{1}{2}(x(t) + x^*(t))$$

La señal $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ es periódica con periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

La señal $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ es periódica con periodo $N_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ si y sólo si $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ es racional

1.3. Propiedades de Sistemas

1. **Sistema Estático (sin memoria)** La salida $y(t)$ sólo depende de la entrada en ese mismo instante $x(t)$.
2. **Sistema Dinámico (con memoria)** La salida $y(t)$ depende de $x(\tau)$ con $\tau \neq t$
3. **Sistema Invertible** Un sistema H se dice que es invertible si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow H_{x_1} \neq H_{x_2}$. El sistema inverso de H se denota por H^I.
4. **Sistema Causal** La salida $y(t)$ depende de $x(\tau)$ con $\tau \leq t$. Por ejemplo, cualquier sistema estático.
5. **Sistema Estable** La salida $y(t)$ está acotada para cualquier entrada $x(t)$ que también esté acotada.
6. **Sistema Inestable** La entrada $x(t)$ está acotada, pero la salida $y(t)$ no lo está.

7. **Sistema Lineal** Un sistema H se dice que es lineal si cumple:

$$\boxed{H(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 H(x_1) + a_2 H(x_2)}$$

8. **Sistema Invariante en el Tiempo** Si dada una entrada $x_1(t)$ con su correspondiente salida $y_1(t)$, al desplazar la entrada en el tiempo, $x_2(t) = x_1(t - t_0)$, la salida es la misma, pero desplazada en el tiempo en la misma proporción que la entrada, es decir, $y_2(t) = y_1(t - t_0)$

1.4. Convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

La convolución es conmutativa, asociativa y distributiva.

1.5. Propiedades de Sistemas LIT

1. **Memoria** Un sistema no tiene memoria si su salida en un instante t (n, para sistemas discretos), sólo depende la entrada en ese mismo instante t (n).

   Para sistemas continuos, sabiendo que

   $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

   no tienen memoria cuando $h(t-\tau) = 0$ si $\tau \neq t$, es decir, si $h(t) = 0$ para todo $t \neq 0$

   Para sistemas discretos, sabiendo que

   $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

   no tienen memoria cuando $h[n-k] = 0$ si $k \neq n$, es decir, si $h[n] = 0$ para todo $n \neq 0$

2. **Invertibilidad** Un sistema es invertible cuando se puede construir su señal inversa

   $$h[n] * h^I[n] = \delta[n]$$
   $$h(t) * h^I(t) = \delta(t)$$

3. **Causalidad** Un sistema es causal si su salida $y(t)$ ($y[n]$ para sistemas discretos) depende de la entrada $x(\tau)$ ($x[k]$) con $\tau \leq t$ ($k \leq n$)

   Para sistemas continuos, sabiendo que

   $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

son causales cuando $h(t-\tau)=0$ si $\tau>t$, es decir, si $h(t)=0$ para todo $t>0$

Para sistemas discretos, sabiendo que

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

son causales cuando $h[n-k]=0$ si $k>n$, es decir, si $h[n]=0$ para todo $n>0$

4. **Estabilidad** Un sistema es estable si para cualquier entrada $x(t)$ ($x[n]$ para sistemas discretos) acotada, su salida $y(t)$ ($y[n]$) también está acotada.

Para sistemas continuos

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad |y(t)|\leq\int_{-\infty}^{+\infty}|x(\tau)|\cdot|h(t-\tau)|d\tau$$

Y si $x(t)$ está acotada, entonces $|x(\tau)|<M$ y por lo tanto,

$$|y(t)|\leq M\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t-\tau)|d\tau$$

Por último,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt$$

está acotado si y sólo si H es estable.

Para sistemas discretos

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k] \qquad |y[n]|\leq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|x[k]|\cdot|h[n-k]|$$

Y si $x[n]$ está acotada, entonces $|x[k]|<M$ y por lo tanto,

$$|y[n]|\leq M\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[n-k]|$$

Por último,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|$$

está acotado si y sólo si H es estable.

1.6. Serie de Fourier

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Las únicas frecuencias que pueden aparecer en una señal $x(t)$ son aquellas que son múltiplos de la frecuencia fundamental ω_0

$$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}=\sum_{k=<N>}a_k e^{j\Omega_k n}$$

El número de frecuencias presentes en estas señales es finito.

Esta serie es siempre convergente.

1.7. Coeficientes espectrales a_k

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$x(t)$ es real sii $a_k = a^*_{-k}$
Si $a_0 = 0$, la señal $x(t)$ estará centrada horizontalmente.
Si $x(t)$ tiene simetría par:

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt$$

Si $x(t)$ tiene simetría impar:

$$a_k = j\frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=<N>} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=<N>} x[n]e^{-j\Omega_k n}$$

1.8. Condiciones de Dirichlet

1. La señal $x(t)$ es <u>absolutamente integrable</u> sobre cualquier periodo

$$\int_{<T_0>} |x(t)|dt < \infty$$

2. La señal $x(t)$ tiene un número finito de máximos y de mínimos en un intervalo $< T_0 >$

3. La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades (finitas) en un intervalo $< T_0 >$

Esta señal $x(t)$ cumple que:
$|a_k| < \infty$
Si $N \to \infty$ entonces $x_N(t) \to x(t)$ (salvo en las discontinuidades)

1.9. Transformada de Fourier (señales aperiódicas)

$$X(j\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Obsérvese que la Transformada de Fourier, $X(\Omega)$, de una señal discreta, $x[n]$, es una señal <u>continua</u> y periódica con periodo 2π, siguiendo los criterios de convergencia de Dirichlet.

1.10. Transformada Inversa de Fourier (señales aperiódicas)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

En una señal aperiódica, tanto continua como discreta, puede aparecer cualquier frecuencia.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

Para las señales discretas, las frecuencias son periódicas con periodo 2π, concentrándose las bajas frecuencias en torno a los múltiplos de 2π y las altas frecuencias, en torno a los múltiplos de π.

1.11. Transformada Generalizada de Fourier (señales periódicas)

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right)$$

Esta señal $X(\Omega)$ es continua y periódica con periodo 2π.

1.12. Transformada de Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Siendo $s = \sigma + j\omega \in ROC$ (Región de Convergencia)

La Transformada de Fourier es un caso particular de la Transformada de Laplace cuando $s = j\omega$, es decir, cuando *eje imaginario* $\subset ROC$

1.13. Reglas para el cálculo de la ROC de la Transformada de Laplace

1. Si $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ es racional. entonces la ROC viene determinada por sus polos (raíces de $D(s)$) y no debe contener ninguno de ellos.
2. Si $x(t)$ es de duración finita y $X(s)$ es convergente para algún s, entonces $ROC = \mathbb{C}$
3. Si $x(t)$ es derecha y $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0 \in ROC$ entonces $\mathcal{R}e\{s\} > \sigma_0 \subset ROC$
4. Si $x(t)$ es izquierda y $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0 \in ROC$ entonces $\mathcal{R}e\{s\} < \sigma_0 \subset ROC$

5. Si $x(t)$ es bilateral y $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0 \in ROC$ entonces la ROC consistirá en una banda en el plano s que incluya la línea $\mathcal{R}e\{s\} = \sigma_0 \subset ROC$

En definitiva, los pasos a seguir a la hora de calcular la ROC de una señal derecha (izquierda) son:

1. Se dibujan todos los polos
2. Si la señal es derecha (izquierda), tomamos el polo que esté más a la derecha (izquierda)
3. Si la señal es derecha (izquierda), la ROC estará a la derecha (izquierda) del polo más a la derecha (izquierda).

1.14. Transformada Inversa de Laplace

$$x(t) \longleftrightarrow \begin{cases} X(s) \\ ROC \end{cases}$$

Para ello, y suponiendo el caso en que $X(s)$ es racional. seguimos tres puntos:

1. Desarrollo en fracciones simples

$$\begin{cases} X(s) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{A_i}{s + a_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i(s) \\ ROC_i \end{cases}$$

2. Cálculo de las ROC_i

   A partir de la ROC de $X(s)$ se pueden inferir las ROC_i

3. Tablas y Propiedades

   Para cada $X_i(s)$ con su ROC_i mediante el uso de tablas y propiedades conocidas se obtienen las señales $x_i(t)$

   Por último:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)$$

1.15. Transformada Z

$$\begin{cases} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\Omega n} \\ z \in ROC \end{cases}$$

La Transformada z de $x[n]$ coincide con la Transformada de Fourier de esa misma señal cuando $r = 1$, es decir, cuando la circunferencia de radio unidad está contenida en la ROC.

1.16. Reglas para el cálculo de la ROC de la Transformada Z

1. ROC es un anillo en el plano z y centrado en el origen.
2. ROC no contiene los polos de $X(z)$
3. Si $x[n]$ es de duración finita, entonces $ROC = \mathbb{C}$ (excepto $z = 0$ y/o $z = +\infty$)
4. Si $x[n]$ es derecha y $\{|z| = r_0\} \subset ROC \Rightarrow \{|z| > r_0\} \subset ROC$
5. Si $x[n]$ es izquierda y $\{|z| = r_0\} \subset ROC \Rightarrow \{|z| < r_0\} \subset ROC$
6. Si $x[n]$ es bilateral y $\{|z| = r_0\} \subset ROC \Rightarrow ROC$ consiste en un anillo que contiene a $\{|z| = r_0\}$

En resumen, si una señal es derecha (izquierda) su ROC viene dada por el exterior (interior) de la circunferencia determinada por el polo más externo (interno).

1.17. Resumen de Señales

dB	$lineal$
-40	$0'01 \rightarrow -2$
-20	$0'1 \rightarrow -1$
0	$1 \rightarrow 0$
20	$10 \rightarrow 1$
40	$100 \rightarrow 2$

$$\boxed{x\ dB = 10^{\frac{x}{20}}\ lineal}$$

$$\boxed{x\ lineal = 20\log_{10} x\ dB}$$

1.18. Función Respuesta en Frecuencia (Sistemas Continuos)

Sea el sistema

$$\begin{array}{l} a_n \dfrac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \dfrac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \dfrac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 x(t) \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{n-1}(0) = 0 \end{array}$$

se define

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \cdots + b_0}{a_n (j\omega)^n + \cdots + a_0}$$

(Sólo válido para sistemas estables)

1.19. Función de Transferencia (Sistemas Continuos)

Dado el sistema:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

se define

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Válido tanto para sistemas estables, como inestables. De hecho, la Función de Transferencia coincide con la Función Respuesta en Frecuencia si *eje imaginario* $\subset$ *ROC*

Si el sistema $H(s)$ es causal y estable, todos los polos estarán en el semiplano izquierdo.

Por ser estable *eje imaginario* $\subset$ *ROC*

Por ser causal $h(t)$ es derecha, es decir, la *ROC* de $H(s)$ está a la derecha del polo más a la derecha.

1.20. Función Respuesta en Frecuencia (Sistemas Discretos)

Sea el sistema

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ y[-1] = y[-2] = \cdots = y[-N] = 0 \end{cases}$$

se define

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

1.21. Función de Transferencia (Sistemas Discretos)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Válido tanto para sistemas estables, como inestables. De hecho, la Función de Transferencia coincide con la Función Respuesta en Frecuencia si $\{|z| = 1\} \subset ROC$

Si $H(z)$ es causal y estable, todos los polos de $H(z)$ están (estrictamente) dentro del círculo unidad y a la inversa.

Por ser estable, $\{|z| = 1\} \subset ROC$

Por ser causal $h(t)$ es derecha, es decir, la ROC de $H(z)$ es el exterior de la circunferencia de radio R, siendo R la distancia del polo más a externo al origen.

1.22. Teorema de Muestreo

Sea una señal de banda limitada ($X(\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_M$).

Entonces la señal $x(t)$ se puede reconstruir (idealmente) a partir de su muestreo $x^*(t)$, si $\omega_S \geq 2\omega_M$ (idealmente).

Para ello se utiliza un filtro (ideal) $H^*(s)$.

1.22.1. "Aliasing"

Cuando $\omega_S < 2\omega_M$ se dice que se está submuestreando una señal, y se produce el fenómeno conocido como "aliasing".